Chapitre 10 : Fonctions de référence.

A. Fonction carré.

Définition :

La fonction carré, est la fonction f définie par : $f(x) = x^2$

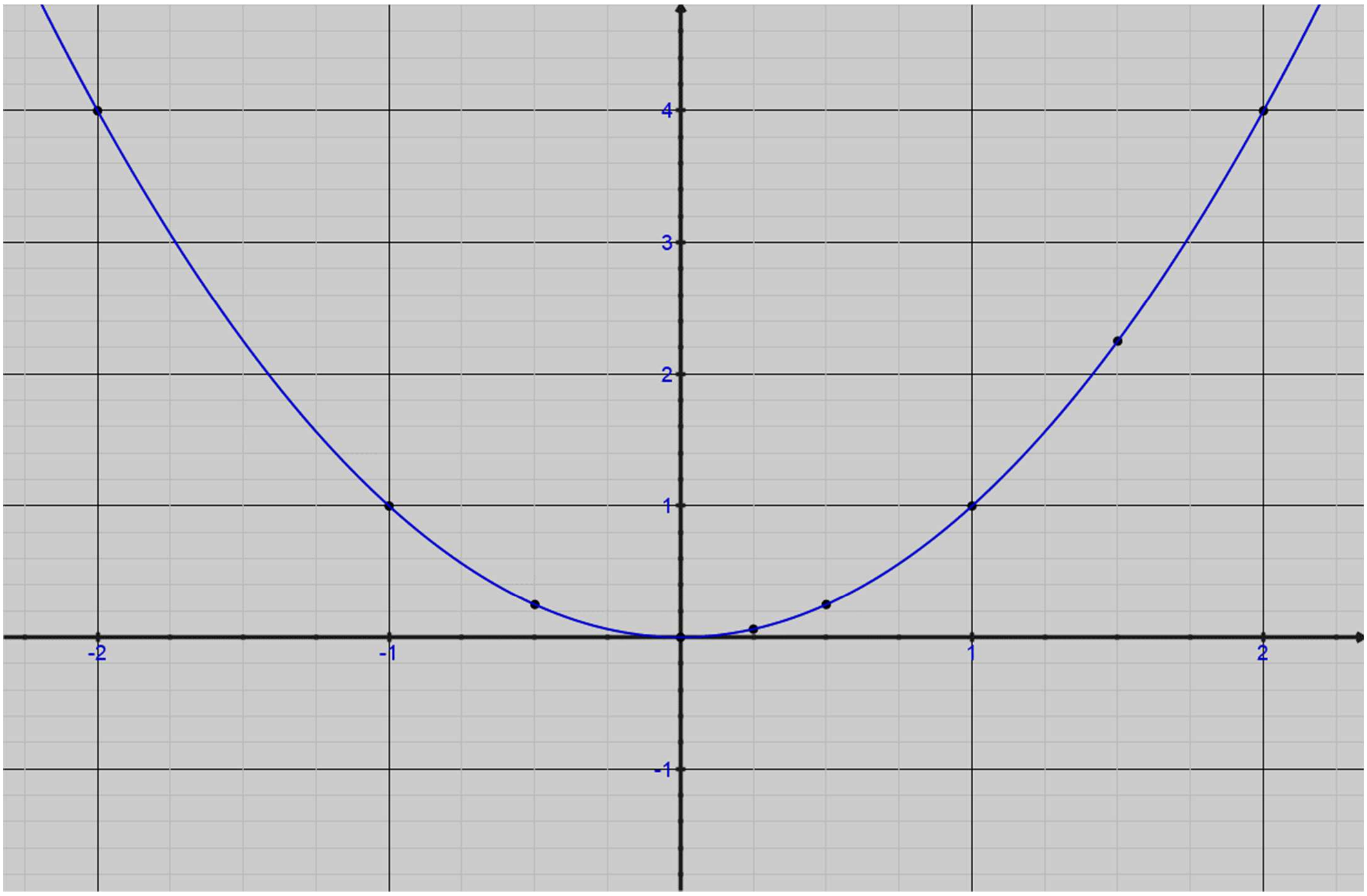
Tableau de valeurs :

Compléter le tableau de valeurs ci-dessous : (On donnera l'expression des images **sous forme décimale**)

x	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-2
$f(x)$	4	2,25	1	0,25	0,0625	0	0,25	1	4

Construction de la représentation graphique de f

Sur le graphique ci-dessous, placer les 9 points de la représentation graphique de f (Points de coordonnées $(x; f(x))$ pour les neuf valeurs de x étudiées dans le tableau de valeurs puis relier au mieux ces points par une courbe.



Définition :

La représentation graphique de la fonction carré est appelée **parabole.**

Quelques propriétés :

- Signe de $f(x)$

Pour tout réel x , on a : $f(x) \geq 0$. Donc on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f(x) = x^2$		+	0	+	

- Tableau de variations de f

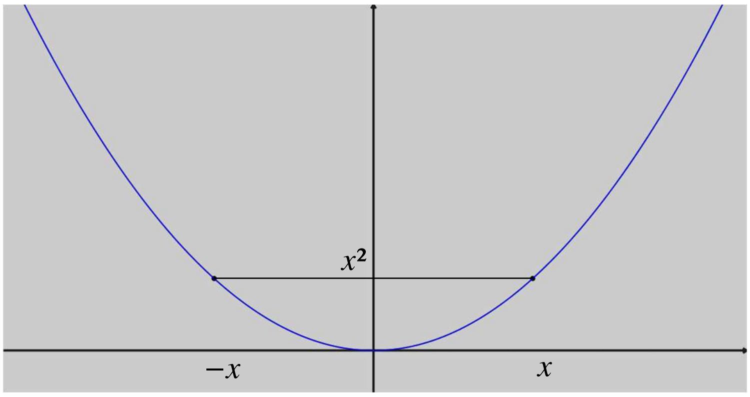
La fonction carré f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

- Axe de symétrie :

Pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$

En effet : $(-x)^2 = x^2$



Remarque importante :

$(-3)^2 = 9 \; mais \quad -3^2 = -9$

$(-1)^2 = 1 \; mais \; -1^2 = -1$

$(-x)^2$ est toujours positif

$-x^2$ est toujours négatif

La parabole représentant la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

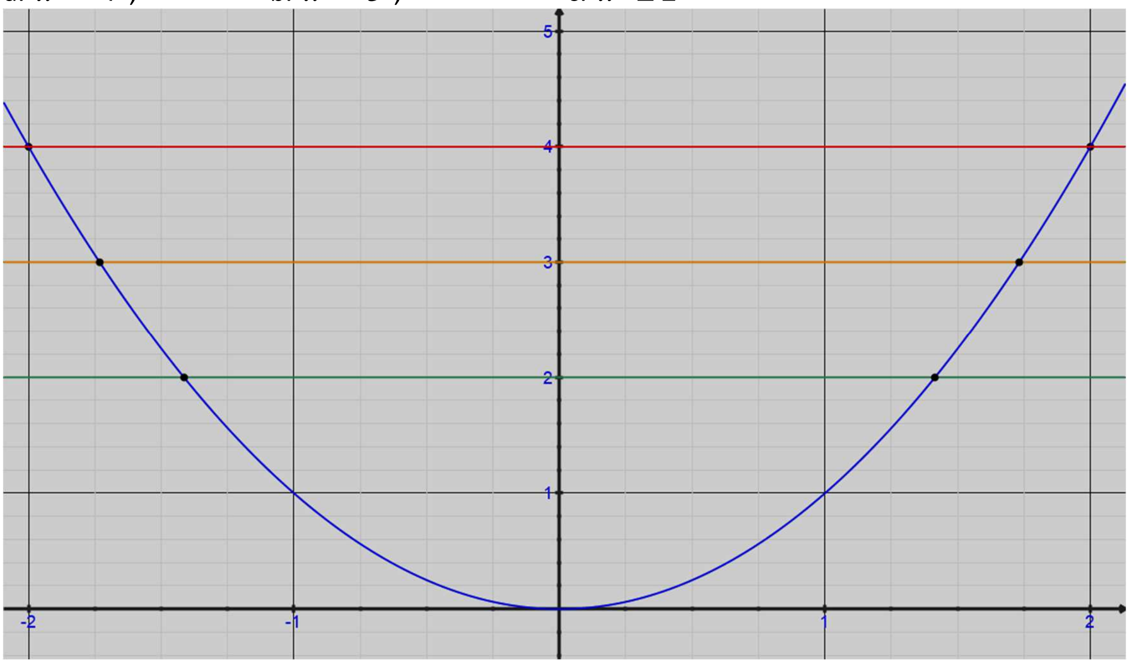
B. Résolution d'équations et d'inéquations à partir du graphique

Exemple d'introduction :

On donne ci-dessous la représentation de la fonction carré.

A partir du graphique, résoudre les équations et inéquation suivantes :

a. $x^2 = 4$; b. $x^2 = 3$; c. $x^2 \leq 2$



a. $x^2 = 4$: On trouve $S = \{-2; 2\}$

b. $x^2 = 3$: On trouve deux solutions environ : $1,75 \; et \; -1,75$. En réalité : $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

c. $x^2 \leq 2$: On trouve x environ entre -1,4 et 1,4. En réalité : $S = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

C. Fonction cube

Définition :

La fonction cube, est la fonction f définie par : $f(x) = x^3$

Par exemple : $4^3 = 4\times4\times4 = 64$ *et* $(-2)^3 = (-2)\times(-2)\times(-2) = -8$

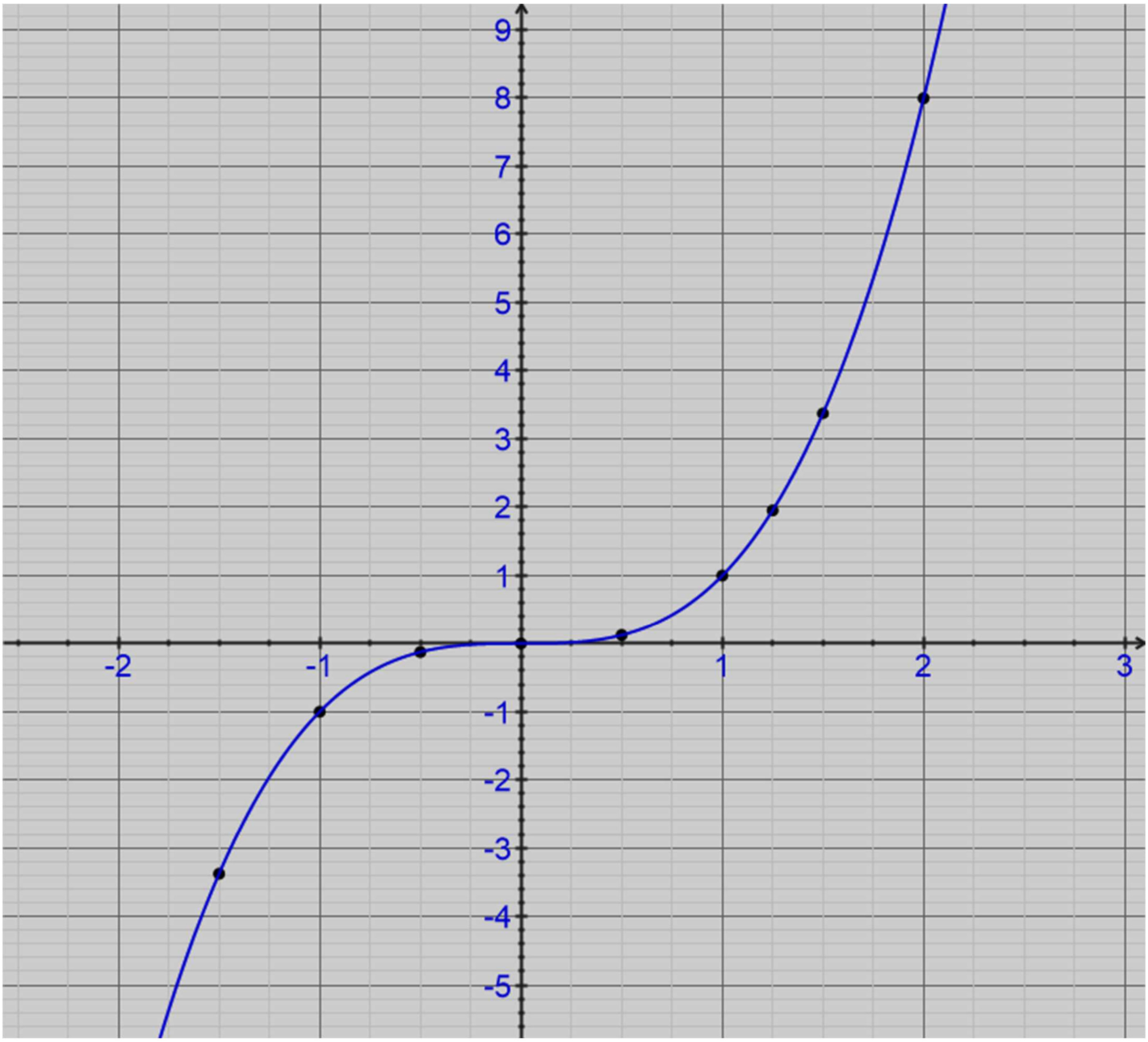
Tableau de valeurs :

Compléter le tableau de valeurs ci-dessous : (On donnera l'expression des images **sous forme décimale**)

x	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$
$f(x)$	8	3,375	1,953125	1	0,125	0	-0,125	-1	-3,375

Construction de la représentation graphique de f

Sur le graphique ci-dessous, placer les 9 points de la représentation graphique de f (Points de coordonnées $(x; f(x))$ pour les huit valeurs de x étudiées dans le tableau de valeurs puis relier au mieux ces points par une courbe.



Quelques propriétés :

- Signe de $f(x)$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de x^2		$+$	0	$+$	
Signe de x		$-$	0	$+$	
Signe de $x^2 \times x = x^3 = f(x)$		$-$	0	$+$	

On peut remarquer que x^3 et x sont toujours de même signe :

> Le cube d'un nombre positif est positif
> Le cube d'un nombre négatif est négatif

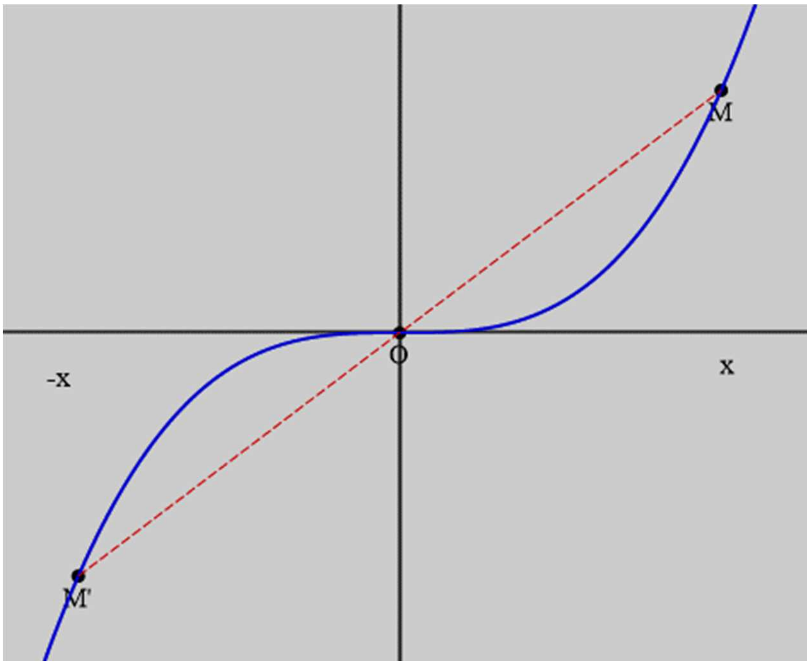
- Tableau de variations de f

La fonction carré f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f		0	

- Symétrie :

Pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$



En effet :

$$(-x)^3 = (-x)\times(-x)^2 = (-x)\times x^2 = -x^3$$

Pour tout nombre x les points $M\left(x;x^3\right)$ et $M'\left(-x;(-x)^3\right)$ ont pour milieu le point O et sont donc symétriques par rapport au point O.

> La représentation graphique de la fonction cube est symétrique par rapport au point O

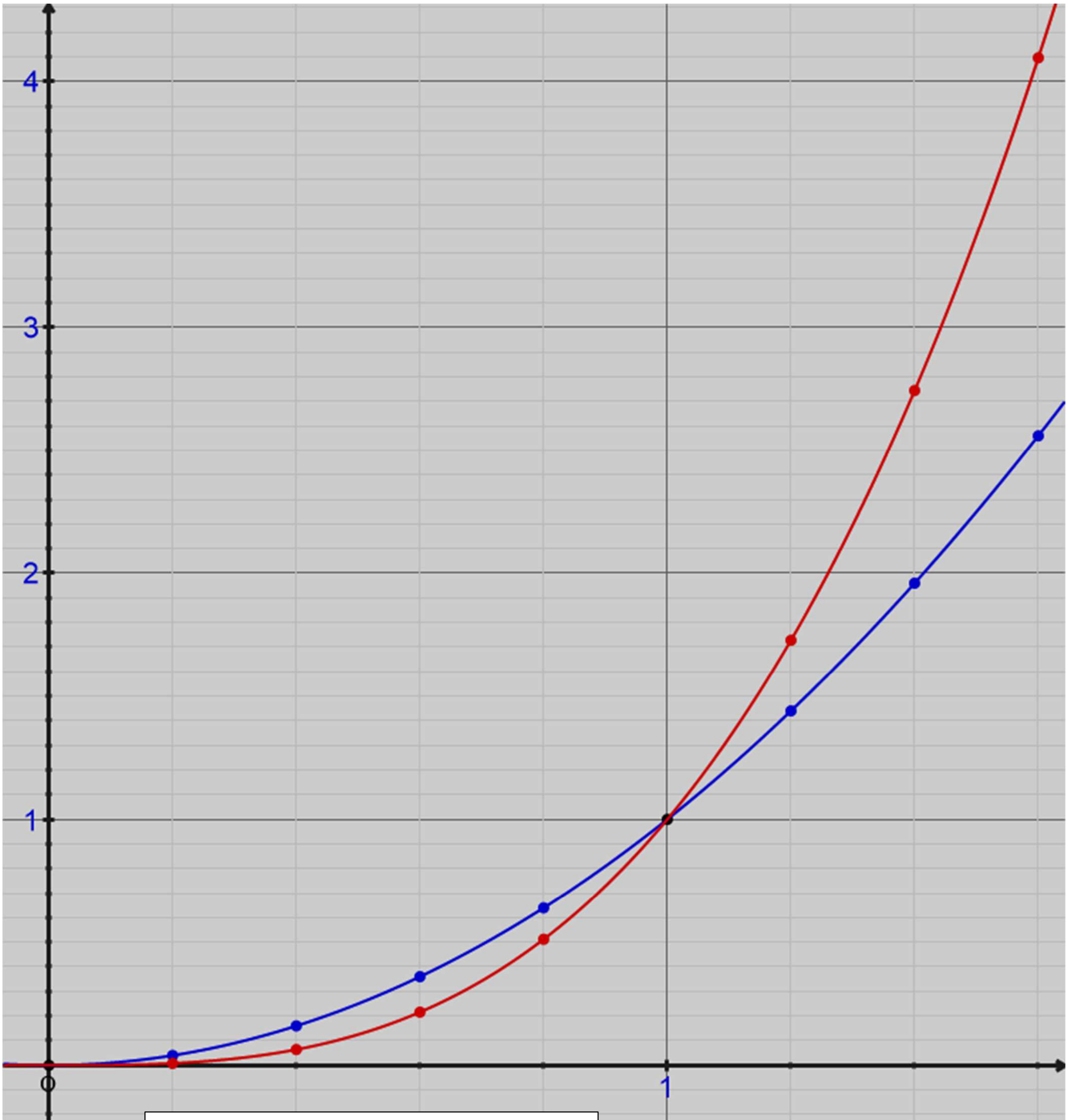
Comparaison des fonctions carré et cube.

Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
$f(x)=x^2$	0	0,04	0,16	0,36	0.64	1	1,44	1,96	2.56
$g(x)=x^3$	0	0,008	0,064	0,216	0.512	1	1,728	2,744	4,096

Sur le graphique ci-dessous placer les neuf points de coordonnées $\left(x;x^2\right)$ de la représentation graphique de la fonction carré f (en bleu) puis construire en bleu la représentation graphique de f .

Sur le graphique ci-dessous placer les neuf points de coordonnées $\left(x;x^3\right)$ de la représentation graphique de la fonction carré g (en rouge) puis construire en rouge la représentation graphique de g .



Conclusion :

Si $x \in \left]0;1\right[$ alors $x^2 > x^3$

Si $x \in \left]1;+\infty\right[$ alors $x^2 < x^3$

D. Fonction Inverse

Définition :

La fonction inverse, est la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{x}$

Ensemble de définition

$f(0)=\frac{1}{0}$ n'existe pas car on n'a pas le droit de diviser par 0.

On dira que 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction f et on note :

$D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ (On note aussi $\mathbb{R}$ privé de 0 : $\mathbb{R}^*$)

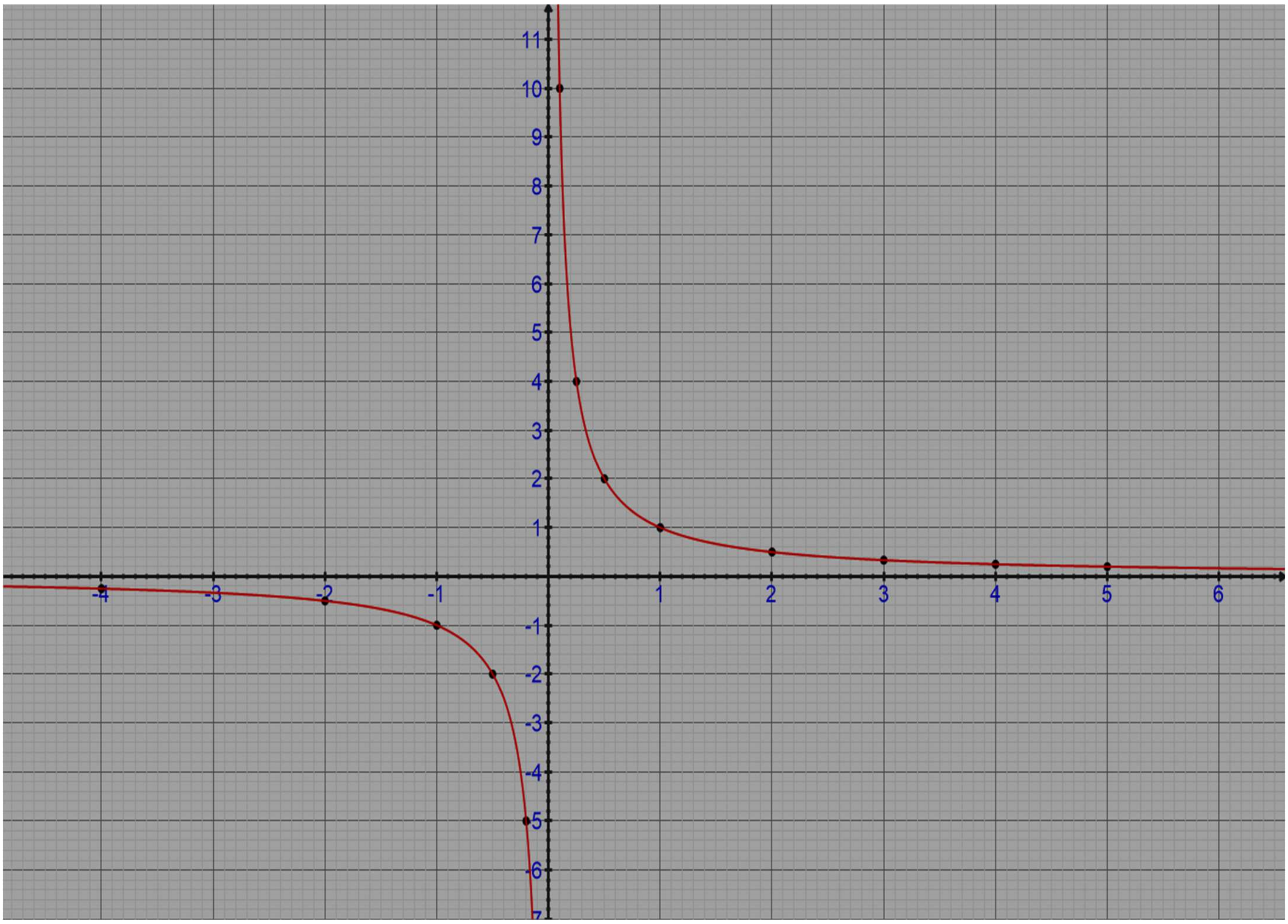
Tableau de valeurs :

Compléter le tableau de valeurs ci-dessous : (On donnera si nécessaire l'expression des images **sous forme d'approximation décimale**)

x	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4
$f(x)$	0,2	0,25	0,33	0,5	1	2	4	10	-5	-2	-1	-0,5	-0,25

Construction de la représentation graphique de f

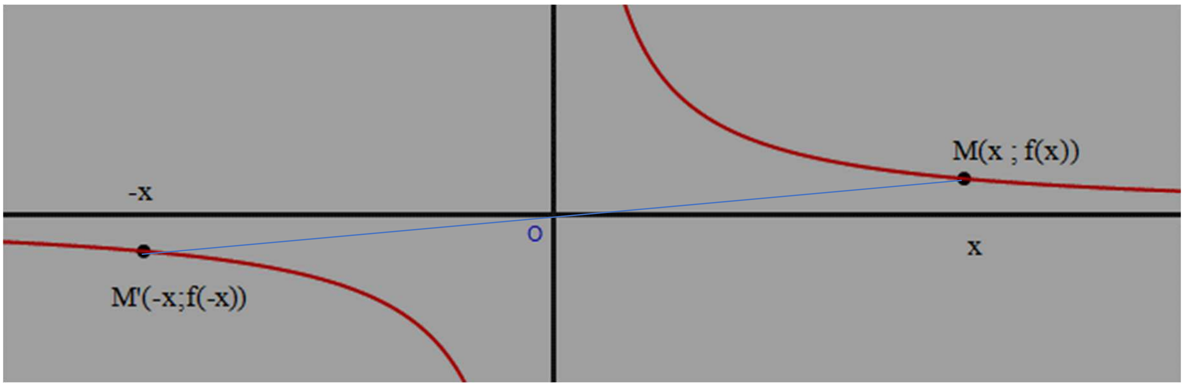
Sur le graphique ci-dessous, placer les 13 points de la représentation graphique de f (Points de coordonnées $(x;f(x))$ pour les treize valeurs de x étudiées dans le tableau de valeurs puis relier au mieux ces points par deux arcs de courbe : un pour $x\in]-\infty;0[$ et l'autre pour $x\in]0;+\infty[$



Symétrie :

Pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$

En effet : $f\left(-x\right) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$



Les points $M\left(x;\frac{1}{x}\right)$ et $M'\left(-x;-\frac{1}{x}\right)$ sont symétriques par rapport au point O car O est le milieu de $\left[MM'\right]$.

Signe de f(x)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	$-$	$\|\|$	$+$

La double barre signifie que la fonction inverse f n'est pas définie en 0.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

Application du sens de variations

Notons a det b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

.

Exercice d'application du sens de variation :

Compléter avec les symboles $<$ ou $\leq$ ou $>$ ou $\geq$

Par exemple : $3 \leq 5$ $donc$ $\frac{1}{3} \boxed{\geq} \frac{1}{5}$

$5 > 2$ $donc$ $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$

$x \geq 4$ donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

x désigne un réel strictement positif :

$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ donc $x \geq 2$

$\frac{1}{x} < 3$ donc $x > \frac{1}{3}$