Chapitre 5 : Racines carrées et identités remarquables.

A. Racines carrées. Définition.

Définition : Si a désigne un réel positif, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif dont le carré vaut a.

On a donc : $\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$

Autre propriété importante : $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

Valeurs importantes :

$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{16}=4$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{64}=8$
$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{144}=12$

Algorithme permettant de trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

On remarque $1^2 = 1 < 2 \;\; et \;\; 2^2 = 4 > 2$ donc $\sqrt{2}$ est situé entre 1 et 2.

Une seule variable : I
Initialisation de la variable : I prend la valeur 1
Traitement :
Tant que I² < 2 faire :
    I prend la valeur I + 0,1
Fin de Tant que
Afficher : $\left(I - 0{,}1 \text{ "} \le \sqrt{2} < \text{" } I\right)$

Valeur de I	I² < 2 (Vrai ou Faux)
1	1<2 **V**
1,1	1,21 < 2 **V**
1,2	1,44 <2 **V**
1,3	1,69 < 2 **V**
1,4	1,96 <2 **V**
1,5	2,25 < 2 Faux → Sortie

On affiche $1{,}4 \le \sqrt{2} < 1{,}5$

Exercice : Ecrire en langage naturel l'algorithme permettant de trouver un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude 10^{-2}.
On remarque $1^2 = 1 < 3 \;\; et \;\; 2^2 = 4 > 3$ donc $\sqrt{3}$ est situé entre 1 et 2.
Puis l'écrire en Python.

« Langage naturel »
Une seule variable : I
Initialisation de la variable : I prend la valeur 1
Traitement :
Tant que I² < 3 faire :
    I prend la valeur I + 0,01
Fin de Tant que
Afficher : $\left(I - 0{,}01 \text{ "} \le \sqrt{3} < \text{" } I\right)$

En Python :

```
I=1
while I**2 <3 :
    I=I+0.01
print(round(I-0.01,2)," <= Racine(3) < ",round(I,2))
```

B. Calculs avec les racines carrées

Formules de calcul :

a et b désignent des nombres positifs.

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Attention :

Calculons : $\sqrt{16}+\sqrt{9}$ et $\sqrt{25}$

$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ et $\sqrt{25}=5$

Il n'y a pas de formule de calcul pour $\sqrt{a+b}$

Exercice 1

Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est un entier naturel le plus petit possible.

Par exemple $\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

$\sqrt{27}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$	$\sqrt{80}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$	$\sqrt{28}=\sqrt{4}\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$
$\sqrt{242}=\sqrt{121}\times\sqrt{2}=11\sqrt{2}$	$\sqrt{600}=\sqrt{100}\times\sqrt{6}=10\sqrt{6}$	$\sqrt{112}=\sqrt{16}\times\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

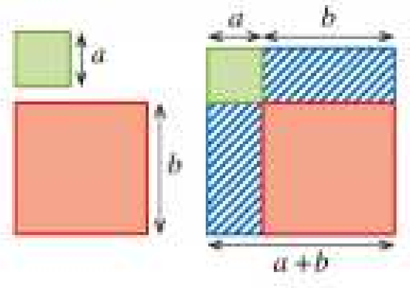
C. Identités remarquables

Propriété fondamentale :

Pour tous les nombres réels a et b on a les développements suivants appelés identités remarquables

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Démonstration géométrique de $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



On considère deux carrés de côté a et b.

Le carré de côté a a pour aire a^2 , celui de coté b a pour aire b^2 .

On considère aussi le grand carré de côté a + b

L'aire de ce grand carré est donc $(a+b)^2$

Mais on peut aussi dire que l'aire de ce grand carré est la somme des aires des deux carrés plus l'aire des deux rectangles hachurés. C'est-à-dire $a^2+b^2+a\times b+b\times a=a^2+b^2+2ab$

On a donc $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Démonstration de $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ par un calcul. $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$ $=a^2-ab-ba+b^2$ $=a^2-2ab+b^2$	Démonstration de $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ par un calcul. $(a+b)(a-b)=a^2+ba-ab-b^2$ $=a^2-b^2$

Exercice 2

En utilisant les identités remarquables écrire les réels ci-dessous sous la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$A=\left(5+\sqrt{2}\right)^2$; $B=\left(\sqrt{2}-3\right)^2$; $C=\left(2+3\sqrt{2}\right)^2$ et $D=\left(3-4\sqrt{2}\right)^2$

$$A=\left(5+\sqrt{2}\right)^2=25+10\sqrt{2}+2=27+10\sqrt{2}$$

$$B=\left(\sqrt{2}-3\right)^2=2-6\sqrt{2}+9=11-6\sqrt{2}$$

$$C=\left(2+3\sqrt{2}\right)^2=4+12\sqrt{2}+18=22+12\sqrt{2}$$

$$D=\left(3-4\sqrt{2}\right)^2=9-24\sqrt{2}+32=41-24\sqrt{2}$$

Exercice 3

Développer les expressions algébriques suivantes en utilisant les identités remarquables :

$A(x)=(x-5)^2$; $B(x)=(5x+3)^2$ et $C(x)=(2x-3)(2x+3)$.

$$A(x)=(x-5)^2$$

$$=x^2-10x+25$$

$$B(x)=(5x+3)^2=25x^2+30x+9$$

$$C(x)=(2x-3)(2x+3)=4x^2-9$$

Factorisation de a² - b²

Dans le sens de la factorisation on a : $\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes :

$A(x)=x^2-9$; $B(x)=4x^2-25$; $C(x)=1-49x^2$ $D(x)=4-(3x-2)^2$ **et** $E(x)=(2x-5)^2-(x+1)^2$

$$A(x)=x^2-9=x^2-3^2=\underline{(x-3)(x+3)}$$

$$B(x)=4x^2-25=(2x)^2-5^2=\underline{(2x-5)(2x+5)}$$

$$C(x)=1-49x^2=1^2-(7x)^2=\underline{(1-7x)(1+7x)}$$

$$D(x)=4-(3x-2)^2=2^2-(3x-2)^2=\left[2-(3x-2)\right]\left[2+(3x-2)\right]$$

$$=(2-3x+2)(2+3x-2)$$

$$=\boxed{(4-3x)(3x)}$$

$$E(x)=(2x-5)^2-(x+1)^2=\left[(2x-5)-(x+1)\right]\left[(2x-5)+(x+1)\right]$$

$$=(2x-5-x-1)(2x-5+x+1)$$

$$=\underline{(x-6)(3x-4)}$$