Chapitre 6 : Premier degré et fonctions affines

A. Introduction : Notion de fonction.

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme « Première fonction ».
Variables E, T, S (Entrée, Traitement et Sortie)
1. Entrer (E)
2. T ← E – 2
3. T ← T ^ 2
4. S ← T + 3
5. Afficher (S)

1° Compléter le tableau ci-dessous, indiquant les différentes valeurs prises par les variables lors du déroulement de cet algorithme.

Ligne 1 : E	5	4	2	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	x
Ligne 2 : T	3	2	0	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$x-2$
Ligne 3 : T	9	4	0	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$(x-2)^2$
Ligne 4 : S	12	3	3	7	$\frac{13}{4}$	$\frac{25}{4}$	$(x-2)^2+3$

2° On note x , la valeur saisie en E en ligne 1.
Exprimer en fonction de x , la valeur de S affichée en ligne 5.
(On pourra remplir la dernière colonne du tableau).

Définition.
Définir une fonction f sur une partie D de $\mathbb{R}$, c'est associer à tout nombre x de D, un nombre appelé **image** du réel x par f .

Sur l'exemple la fonction f à tout nombre x entré dans E, associe le nombre affiché dans S

On peut aussi dire que f à tout x associe $f(x)=(x-2)^2+3$

Définitions

- D est appelé ensemble de définition de f .
- **L'image du réel x est notée $f(x)$** .
  Sur l'exemple l'image de 5 notée $f(5)$ vaut 12. On écrit : $f(5)=12$.
- Si $f(a)=b$, on dit que : a est un antécédent de b
  Sur l'exemple un antécédent de 12 est 9.

Exercice 1

Soit la fonction f qui à la valeur saisie en E associe la valeur affichée en S de l'Algorithme « Deuxième fonction » ci-contre.

1° Déterminer $f(3)$.
2° Proposer une expression développée de $f(x)$
3° Déterminer alors $f(0)$ *et* $f(2)$

Algorithme « Deuxième fonction »
Variables E, T, S : (Entrée, Traitement et Sortie)
1. Entrer (E)
2. T ← E + 1
3. T ← T ^ 2
4. S ← T + 2
5. Afficher (S)

1° E ← 3 ; T← 4 ; T ← 16 ; T ← 18 ; S ← 18 . On a donc $f(3)=18$

2° E ← x ; T← x + 1 ; T ← (x + 1)² ; T ← (x + 1)²+2 ; S ←(x + 1)²+2 .
On a donc $f(x)=(x+1)^2+2=x^2+2x+1+2=x^2+2x+3$

3° $f(0)=0^2+2\times 0+3=3$
$f(2)=2^2+2\times 2+3=11$

B. Représentation graphique d'une fonction

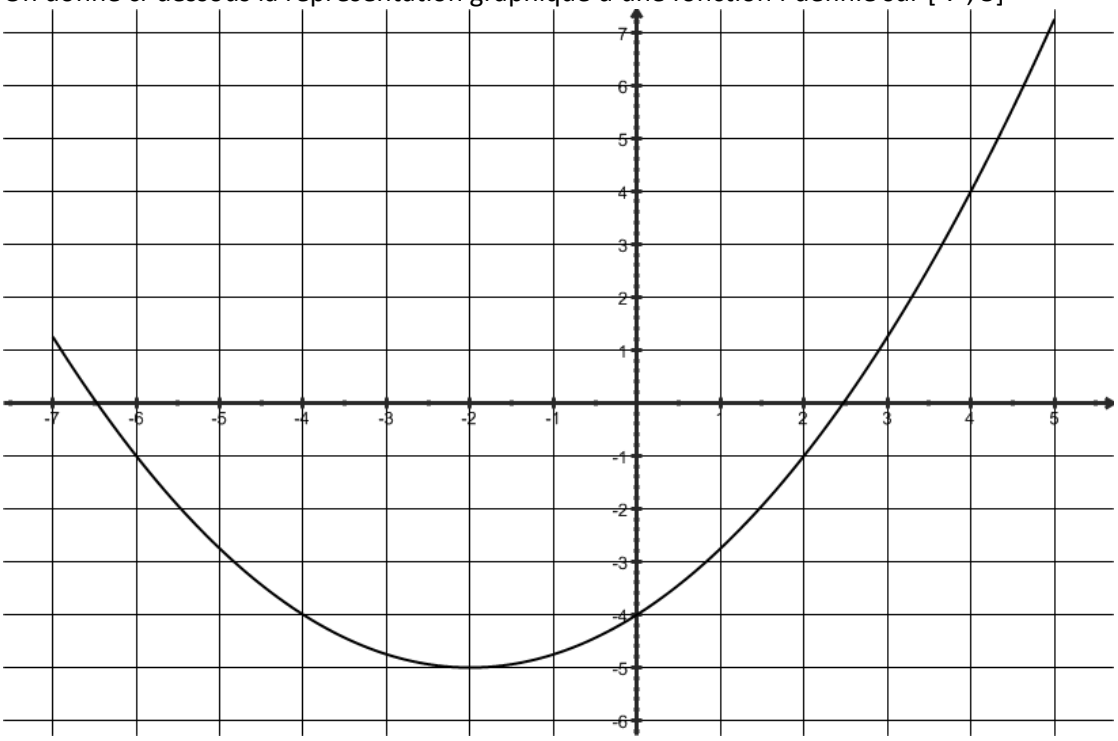
Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

La représentation graphique de f , (ou courbe représentative de f) est formée de l'ensemble des points de coordonnées $(x;f(x))$ lorsque x décrit D.

Exercice 2

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur [-7 ; 5]



1° Déterminer graphiquement $f(-6);f(2)\ et\ f(3)$.

2° Déterminer graphiquement les antécédents de 4 et de -1.

3° Résoudre graphiquement les équations :

a) $f(x)=-4$

b) $f(x)=0$

c) $f(x)=-6$

1° Par lecture graphique : $f(-6)=-1; f(2)=-1\ et\ f(3)\approx 1,2$

2° 4 est un antécédent de 4
2 et -6 sont les antécédents de -1

3° $f(x)=-4$: $S=\{-4;0\}$
$f(x)=0$: $S=\{-6,5;2,5\}$ (environ)
$f(x)=-6$ $S=\varnothing$

C. Les fonctions affines

Définition :

Une fonction affine est définie pour tout réel x par : $f(x)=ax+b$

Théorème :

La représentation graphique d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ est une droite.

Exemple :

Parmi les fonctions suivantes quelles sont celles qui sont affines et celles qui ne le sont pas :

$f_1(x)=\dfrac{1}{x+2}$; $f_2(x)=3x$; $f_3(x)=\dfrac{2x-1}{2}$; $f_4(x)=5$; $f_5(x)=3x^2-1$

f_1 n'est pas affine	f_2 est affine . $a=3$ *et* $b=0$
f_3 est affine. $a=0$ *et* $b=5$	f_4 n'est pas affine

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x)=-\dfrac{x}{2}+3$.

1° Construire sa représentation graphique

2° Déterminer $f(8)$ par lecture graphique et par le calcul

3° Résoudre $f(x)=4$ par le graphique et par le calcul.

1° On a $f(0)=3$ donc $A(0;3)$ est un premier point de C_f

$f(4)=1$ donc $B(4.1)$ est un deuxième point de C_f Donc C_f est la droite (AB) .

2° Graphiquement $f(8)=-1$

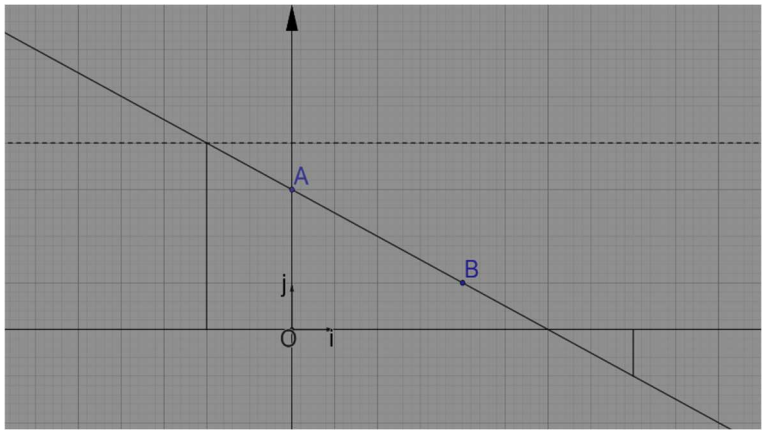
Par le calcul $f(8)=-\dfrac{8}{2}+3=-4+3=-1$

3° Graphiquement $f(x)=4$ pour $x=-2$

$$f(x)=4 \Leftrightarrow -\frac{x}{2}+3=4$$

Par le calcul $$\Leftrightarrow -\frac{x}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow x=-2$$



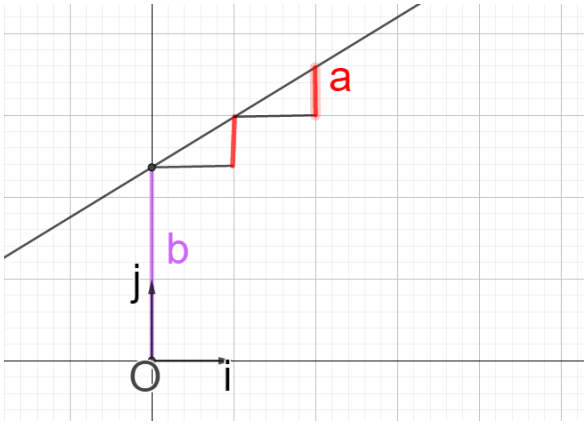
D. Interprétation de a et de b d'une fonction affine

Définition : Soit f la fonction affine définie par $f(x)=ax+b$

Notons D la droite d'équation y = ax + b qui est la représentation graphique de f .

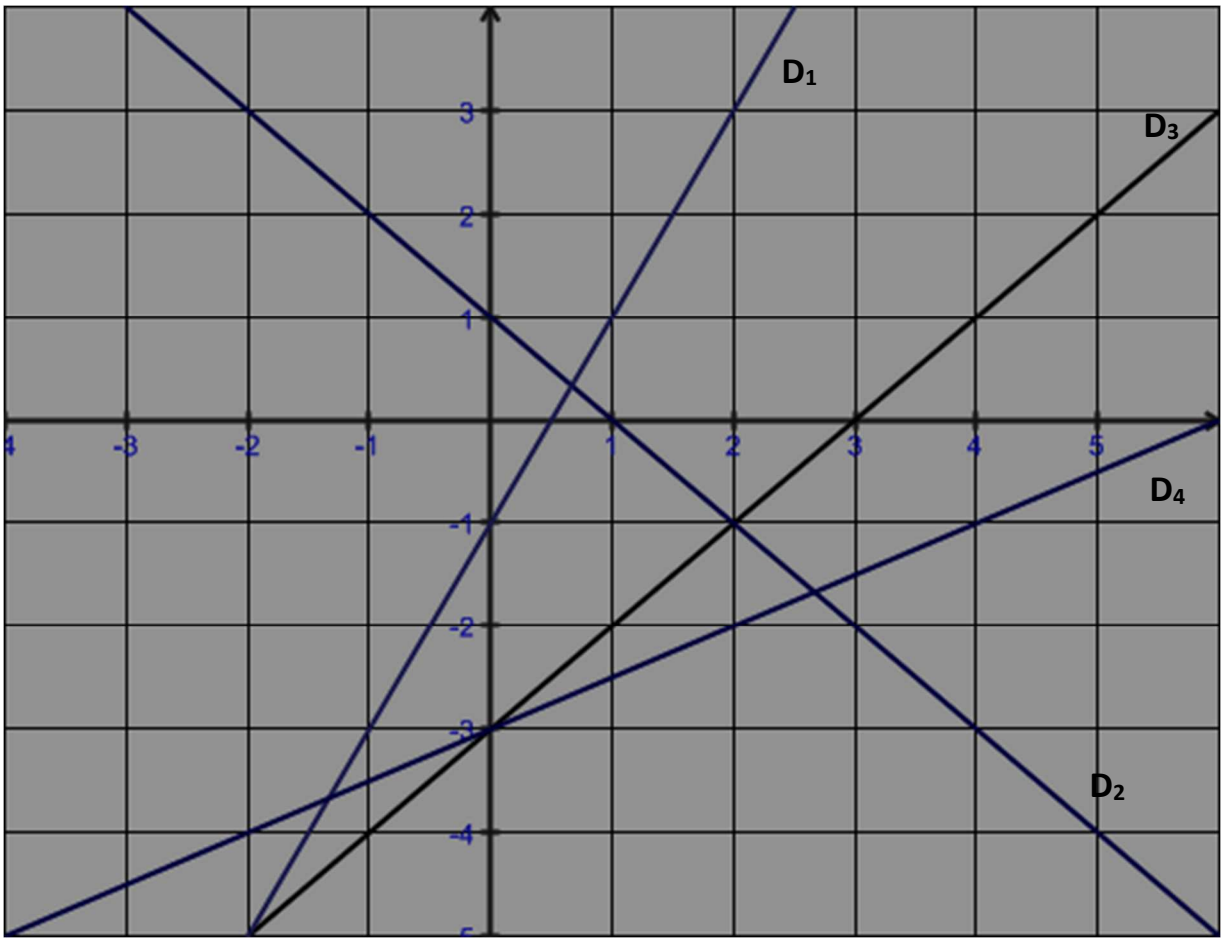
b est l'ordonnée à l'origine de la droite D

a est le coefficient directeur de la droite D



Exercice 4 : Détermination graphique de l'expression de f

Donner par lecture graphique l'expression de $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$ et $f_4(x)$ dont les représentations graphiques sont respectivement D_1; D_2; D_3 et D_4



On trouve :

$f_1(x)=2x-1$	$f_2(x)=-x+1$	$f_3(x)=x-3$	$f_4(x)=\frac{1}{2}x-3$

Théorème Détermination de a par le calcul

Soit f une fonction affine. On note $f(x)=ax+b$

On connaît les images par f de deux réels distincts x_1 et x_2.

Alors : $$\boxed{a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

Exercice 5

1° Déterminer l'expression de la fonction affine f sachant que $f(-1)=7$ et $f(3)=12$

2° Une entreprise de transport propose un tarif qui est une fonction affine du poids transporté.
On sait que pour 3 kg transporté le tarif est de 16, 20 € alors que pour 30 kg le tarif est de 27 €
Donner l'expression du tarif T(x) en fonction du poids x en kilogrammes.

1° On a : $a=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{12-7}{4}=\dfrac{5}{4}$

Donc $f(x)=\dfrac{5}{4}x+b$

Or $f(-1)=7 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{4}+b=7 \Leftrightarrow b=7+\dfrac{5}{4}=\dfrac{33}{4}$

Ainsi : $\boxed{f(x)=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{33}{4}}$

2° On a $T(x)=ax+b$ avec $T(3)=16,2 \ \ et \ T(30)=27$

Donc $a=\dfrac{T(30)-T(3)}{30-3}=\dfrac{27-16,2}{27}=\dfrac{10,8}{27}=0,4$

On a donc $T(x)=0,4x+b$

Mais comme $T(30)=27$, $0,4\times 30+b=27 \Leftrightarrow 12+b=27 \Leftrightarrow b=27-12 \Leftrightarrow b=15$

Donc $\boxed{T(x)=0,4x+15}$

D. Equations produit.

Le principe : $\boxed{A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \ ou \ B(x)=0}$

Exemple : $(2x-3)(x+1)=0$ Soit l'équation :

On a : $(2x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ ou \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ ou \\ x=-1 \end{cases}$. Donc $S=\left\{-1;\dfrac{3}{2}\right\}$

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

a) $(-2x+3)(3x+4)=0$

b) $25x^2-9=0$

c) $(2x-3)(x+1)+4x^2-9=0$

a) $(-2x+3)(3x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3=0 \\ ou \\ 3x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2} \ ou \ x=-\dfrac{4}{3} \quad S=\left\{-\dfrac{4}{3};\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $25x^2-9=0 \Leftrightarrow (5x)^2-3^2=0 \Leftrightarrow (5x-3)(5x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3=0 \\ ou \\ 5x+3=0 \end{cases}$. On trouve $x=\dfrac{3}{5} \ ou \ x=-\dfrac{3}{5}$

$S=\left\{-\dfrac{3}{5};\dfrac{3}{5}\right\}$

c)

$$(2x-3)(x+1)+4x^2-9=0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+1)+(2x)^2-3^2=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+1)+(2x-3)(2x+3)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+1+2x+3)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-3)(3x+4)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \quad ou \quad 3x+4=0$$

Donc $S=\left\{-\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right\}$