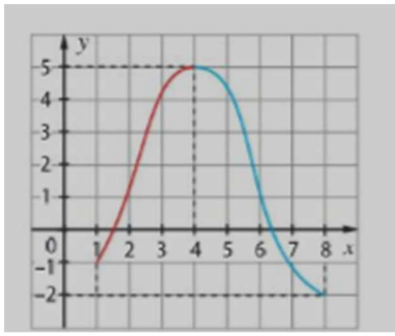
Chapitre 9 : Variation des fonctions.

A. Introduction et définition.

Exemple :

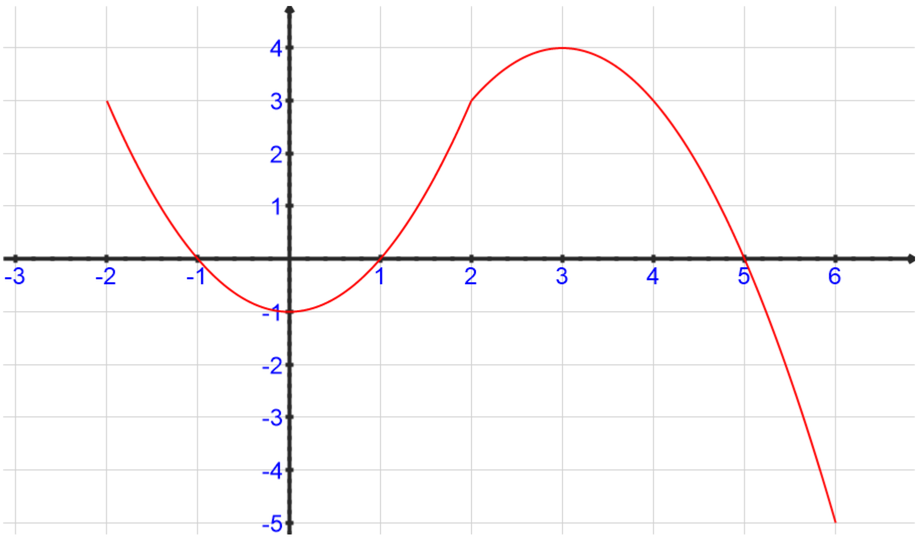


La courbe C_f ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle [1; 8].
On remarque que dans l'intervalle [1; 4], si les valeurs de x augmentent, alors les valeurs de $f(x)$ augmentent, alors que dans l'intervalle [4; 8], si les valeurs de x augmentent, alors les valeurs de f(x) diminuent.
On dira que la fonction f est croissante sur $[1;4]$ et que f est décroissante sur $[4;8]$.
La plus grande valeur que la fonction f peut prendre sur l'intervalle $[1;8]$ est 5 et ceci est réalisé pour $x=4$.
On dira que sur $[1;8]$ f admet un maximum en $x=4$ et ce maximum a pour valeur 5.
De même, sur $[1;8]$ f admet un minimum en $x=8$ qui a pour valeur -2.

On résume l'ensemble de ces données en dressant le tableau de variations de f sur $[1;8]$:

x	1		4		8
Variations de la fonction f			5		
		↗		↘	
	-1				-2

Exercice 1 :



On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2;6]$.
1° Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-2;6]$.
2° Préciser pour quelle valeur de x f présente un maximum et un minimum sur l'intervalle $[-2;6]$ et préciser la valeur de ce maximum et de ce minimum.
3° Résoudre sur $[-2;6]$ les inéquations :
a. $f(x)\leq 0$
b. $f(x)>3$

x	-2		0		3		6
Variations de f	3				4		
		↘		↗		↘	
			-1				-5

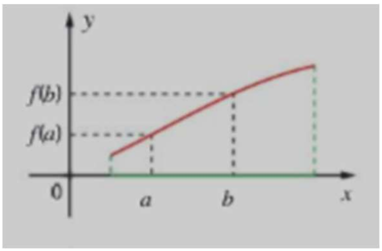
2° f admet sur $[-2;6]$ un minimum en $x=6$ et ce minimum a pour valeur -5
f admet sur $[-2;6]$ un maximum en $x=3$ et ce minimum a pour valeur 4
3° a. $f(x)\leq 0$ si $-1\leq x\leq 1$ ou $5\leq x\leq 6$. $S=[-1;1]\cup[5;6]$
b. $f(x)>3$ si $2<x<4$. $S=]2;4[$

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

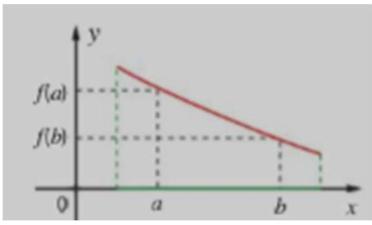
On dit que f **est croissante sur** I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

Les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que a et b. On dit que f conserve l'ordre.



On dit que f **est décroissante sur** I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

Les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre inverse de a et b. On dit que f change l'ordre.



Théorème

Soit la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$

Si le coefficient directeur a est positif alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si le coefficient directeur a est négatif alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

B. Résolution des inéquations de degré 1

Méthode 1

Exemple 1	Exemple 2
Résoudre : $5x + 3 \leq -6 + x$ $5x - x \leq -6 - 3$ $4x \leq -9$ $x \leq -\frac{9}{4}$ (On a multiplié des deux côtés par $\frac{1}{4}$) $S = \left]-\infty; -\frac{9}{4}\right]$	Résoudre : $3x + 2 < 5x + 6$ $3x - 5x < 6 - 2$ $-2x < 4$ On multiplie des deux côtés par $-\frac{1}{2}$ $x > -2$ $S =]-2; +\infty[$

On résout les inéquations de premier degré comme des équations, sauf au stade multiplication-division, si l'on fait passer un moins de l'autre côté de l'inégalité, il faut penser à changer le sens de l'inégalité.

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes :

$2x+3>-x+5$	$3x+5\geq 4x-3$	$-x-6\leq 4x+1$
$2x+x>5-3$ $3x>2$ $x>\dfrac{2}{3}$ $S=\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$	$3x-4x\geq -3-5$ $-x\geq -8$ $x\leq 8$ $S=\left]-\infty;8\right]$	$-x-4x\leq 1+6$ $-5x\leq 7$ $x\geq \dfrac{-7}{5}$ $S=\left[-\dfrac{7}{5};+\infty\right[$

Méthode 2 : Utilisation d'un tableau de signes.

Exemple 1

Résoudre $2x+3\leq -x+4$

$2x+3+x-4\leq 0$

$3x-1\leq 0$

($3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$)

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	

($f: x\rightarrow 3x-1$ *croissante car* $a=3$)

$S=\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right]$

Exemple 2

Résoudre $x+4<3x+2$

$x+4-3x-2<0$

$-2x+2<0$

$-2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$	0	$-$	

($f: x\rightarrow -2x+2$ *décroissante car* $a=-2$)

$S=\left]1;+\infty\right[$

Principe :

On met tous les termes à gauche de l'inégalité et on obtient alors une fonction affine.
On complète le tableau de signes en faisant attention au sens de variations de cette fonction affine.

Exercice 3 : Résoudre les inéquations suivantes :

$5x+3>-x+5$	$2x+3\geq 4x-7$
$5x+3+x-5>0$ $6x-2>0$ $(6x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3})$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{1}{3} & & +\infty \\ \hline 6x-2 & & - & 0 & + & \end{array}$ $S=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$	$2x+3-4x+7\geq 0$ $-2x+10\geq 0$ $(-2x+10=0 \Leftrightarrow x=5\ )$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 5 & & +\infty \\ \hline -2x+4 & & + & 0 & - & \end{array}$ $S=\left]-\infty;5\right]$

C. Signe d'un produit de fonctions affines

Exemple :

Déterminer le signe selon les valeurs du réel x de $f(x)=(3x-5)(3-2x)$

Etape 1 : « On cherche les 0 »

$3x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ et $3-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Etape 2 : On construit le tableau

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ce tableau constitue la réponse et remplace les phrases :

Si $x\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ $f(x)<0$

Si $x\in\left]\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right[$ $f(x)>0$

Si $x\in\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ $f(x)<0$

En $x=\frac{3}{2}$ $et\ en$ $x=\frac{5}{3}$ $f(x)=0$

Exercice 4

1° A l'aide d'un tableau de signes préciser selon les valeurs du réel x quel est le signe du produit $(2x-5)(1-x)$

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x-5)(1-x)\leq 0$

2° Résoudre de même l'inéquation : $(x+4)(2x-5)<0$

1° $2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ et $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
2x-5		$-$		$-$	0	$+$	
1-x		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-5)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On cherche pour quels x, $(2x-5)(1-x)$ est négatif donc : $S=]-\infty;1]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

2° $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ $2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

x	$-\infty$		-4		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+4)(2x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-4;\frac{5}{2}\right[$

D. Résolution des inéquations de degré 2

Un exemple :

Si on a à résoudre l'inéquation : $(3x-5)(2+x)\geq(x-3)(2+x)$

Etape 1 : On met « tout à gauche » pour avoir 0 au membre de droite.	$(3x-5)(2+x)\geq(x-3)(2+x)$ $(3x-5)(2+x)-(x-3)(2+x)\geq 0$
Etape 2 : On factorise…	$(2+x)\left[(3x-5)-(x-3)\right]=0$ $(2+x)[3x-5-x+3]\geq 0$ $(2+x)(2x-2)\geq 0$
Etape 3 : On fait un tableau de signes.	$2+x=0 \Leftrightarrow x=-2$ *et* $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$
Etape 4 : On détermine l'ensemble des solutions. Ici selon l'étape 2 on cherche quand $(2+x)(2x-2)$ positif	$S=]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
2+x		$-$	0	$+$		$+$	
2x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$(2+x)(2x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 5 :

Résoudre les inéquations ci-dessous :

1° $(3-x)(2x+5)>(3-x)(x+4)$

2° $(3x-2)^2 \leq 25$ (Penser pour la factorisation à utiliser $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

1° $(3-x)(2x+5)>(3-x)(x+4)$

$(3-x)(2x+5)-(3-x)(x+4)>0$

$(3-x)\left[(2x+5)-(x+4)\right]>0$

$(3-x)(2x+5-x-4)>0$

$(3-x)(x+1)>0$

$3-x=0 \Leftrightarrow x=3 \; et \; x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
3-x		+		+	0	−	
$x+1$		−	0	+		+	
$(3-x)(x+1)$		−	0	+	0	−	

$S=\left]-1;3\right[$

2° $(3x-2)^2 \leq 25$

$(3x-2)^2-5^2 \leq 0$

$(3x-2-5)(3x-2+5) \leq 0$

$(3x-7)(3x+3) \leq 0$

$3x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3} \; et \; 3x+3=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		$7/3$		$+\infty$
3x - 7		−		−	0	+	
3x + 3		−	0	+		+	
$(3x-7)(3x+3)$		+	0	−	0	+	

$S=\left[-1;\frac{7}{3}\right]$