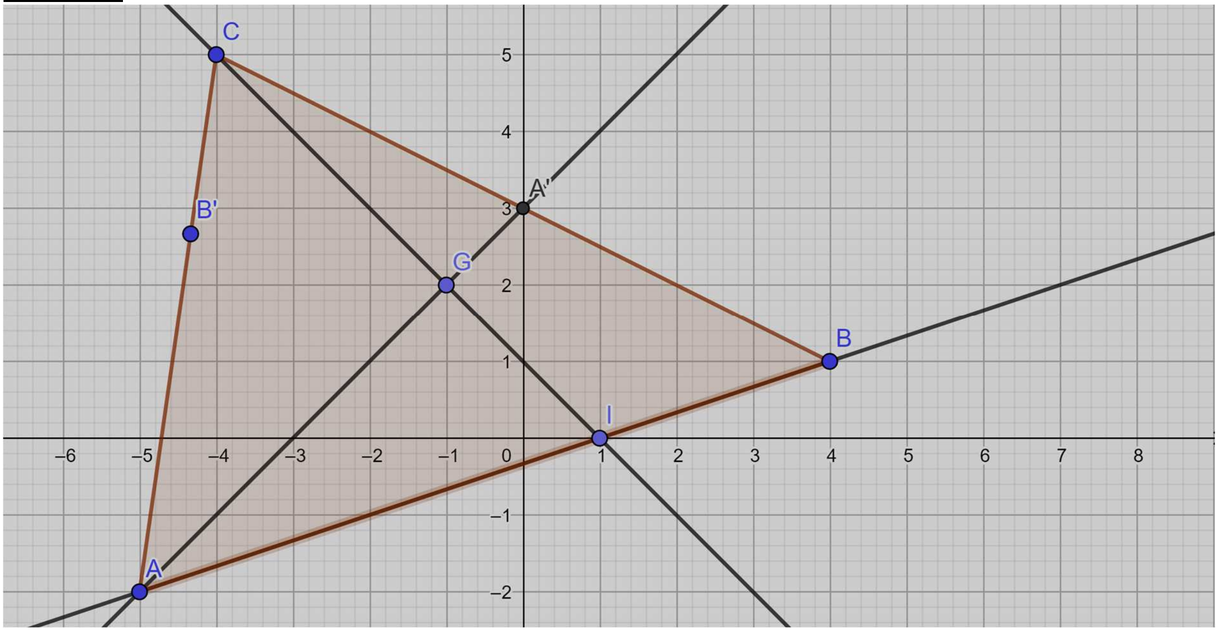
DM 5. Corrigé

Exercice 1



1° $\overrightarrow{AI}\left(1-(-5);0-(-2)\right) \Rightarrow \overrightarrow{AI}(6;2)$ et $\overrightarrow{AB}\left(4-(-5);1-(-2)\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(9;3)$

$\det\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18-18=0$ donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$\boxed{\text{Donc } I \text{ est un point de la droite } (AB)}$.

2° $\overrightarrow{AG}\left(-1-(-5);2-(-2)\right) \Rightarrow \overrightarrow{AG}(4;4)$ et $\overrightarrow{AA'}(5;y+2)$

$A' \in (AG) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \; et \; \overrightarrow{AA'} \; colinéaires \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & y+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4y+8-20=0 \Leftrightarrow 4y=12 \Leftrightarrow y=3$

$\boxed{\text{Donc } A'(0;3)}$

Or le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{4-4}{2};\frac{1+5}{2}\right)=(0;3)$

$\boxed{\text{Donc } A' \text{ est le milieu de } [BC]}$.

3° $\overrightarrow{CG}(3;-3) \; et \; \overrightarrow{CI}(5;-5)$

Donc $\det\left(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CI}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -15-(-15) = -15+15=0$

Donc $\overrightarrow{CG} \; et \; \overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. $\boxed{\text{Donc les points } C, G \text{ et } I \text{ sont alignés}}$.

4° a. $\overrightarrow{CB'}\left(-\frac{13}{3}+4;\frac{8}{3}-5\right) \Rightarrow \overrightarrow{CB'}\left(-\frac{1}{3};-\frac{7}{3}\right)$

Et $\overrightarrow{CA}(-5+4;-2-5) \Rightarrow \overrightarrow{CA}(-1;-7)$. Donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\left(\frac{-1}{3};\frac{-7}{3}\right)$

Comme leurs coordonnées sont égales on a bien : $\boxed{\overrightarrow{CB'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}}$

b. $\overrightarrow{B'I}\left(1+\frac{13}{3};0-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{B'I}\left(\frac{16}{3};-\frac{8}{3}\right)$ et $\overrightarrow{BC}(-4-4;5-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(-8;4)$

$\det\left(\overrightarrow{B'I};\overrightarrow{BC}\right) = \begin{vmatrix} 16/3 & -8 \\ -8/3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{64}{3}-\frac{64}{3}=0$. Donc $\overrightarrow{B'I} \; et \; \overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et

$\boxed{\text{les droites (B'I) et (BC) sont parallèles}}$.

Exercice 2

1° a.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(2x-6)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $(2x-6)(-x+2)\leq 0$. Donc $\boxed{S=\left]-\infty;2\right]\cup\left[3;+\infty\right[}$

2° a. $(x-3)(x+1)-(x-3)(3x+2)=(x-3)\left[(x+1)-(3x+2)\right]=(x-3)(-2x-1)$

b. $x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \;\; et \; -2x-1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-1/2$		3		$+\infty$
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-2x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(x-3)(-2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(x-3)(x+1)-(x-3)(3x+2)>0$ donc $\boxed{S=\left]-\dfrac{1}{2};3\right[}$

3° a. $25-(2x+1)^2=5^2-(2x+1)^2=\left[5-(2x+1)\right]\left[5+(2x+1)\right]=(-2x+4)(2x+6)$

b. $-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2 \;\; et \;\; 2x+6=0 \Leftrightarrow x=-3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
signe de $2x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x+6)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$25\leq(2x+1)^2 \Leftrightarrow 25-(2x+1)^2\leq 0 \Leftrightarrow (-2x+4)(2x+6)\leq 0$. $\boxed{S=\left]-\infty;-3\right]\cup\left[2;+\infty\right[}$

4° a. 3 – x = 0 pour x = 3 et - x + 5 = 0 pour x = 5.

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
Signe de $(3-x)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(3-x)^2(-x+5)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

b. $(3-x)^2(-x+5)\geq 0$ Donc : $\boxed{S=\left]-\infty;5\right]}$

5°

$$(x+1)^2(2-x)>(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2(2-x)-(x+1)^2>0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left[(2-x)-1\right]>0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2(1-x)>0$$

X + 1 = 0 pour x = -1 et 1- x = 0 pour x = 1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(x+1)^2(1-x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

$(x+1)^2(2-x)>(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2(1-x)>0$. $\boxed{S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;1\right[}$